PHYSIQUE

Leçon – Addition numérique de deux ou de plusieurs vecteurs

L'applet fait l'addition de deux ou de plusieurs vecteurs spécifiés numériquement, et affiche la résultante graphiquement et numériquement.

Préalables

L'élève devrait comprendre les propriétés de grandeur et de direction des vecteurs et connaître la méthode d'addition graphique de vecteurs par la mise bout à bout. Il devrait aussi avoir une connaissance pratique de la trigonométrie de base.

Résultats d'apprentissage

L'élève apprendra à calculer la grandeur et la direction de la somme de deux vecteurs (résultante) en sachant les grandeurs et les directions des deux vecteurs qu'il doit additionner. Il apprendra à utiliser la loi des cosinus et la loi des sinus pour accomplir cette tâche. Il apprendra aussi à calculer la somme de deux vecteurs en utilisant leurs composantes.

Directives

L'élève devrait connaître les fonctions de l'applet, telles que décrites dans l'option Aide.

L'applet devrait être ouvert. Les directives point par point présentées dans le texte qui suit doivent être exécutées dans l'applet. Il pourrait être nécessaire de basculer des directives à l'applet et inversement si l'espace écran est limité.

Contenu

Annexe

[La loi des cosinus](#)
[La loi des sinus](#)
[Composantes](#)

Description de la somme de deux vecteurs

Si la fenêtre de l'applet n'est pas vide, supprime son contenu en cliquant sur Réinitialiser.

Entre le premier vecteur, $\vec{v}_1$, avec une grandeur de 100 et un angle θ = 60º en utilisant le mode Coordonnées polaires (positives) ().

Entre le deuxième vecteur, $\vec{v}_2$, avec une grandeur de 130 et un angle de 140º en utilisant le mode Coordonnées polaires (positives) ().

Après avoir entré les deux vecteurs, clique sur Montrer la résultante pour afficher la résultante (somme des vecteurs). Si tu utilises le mode Coordonnées polaires (positives) () pour la résultante, ce qui s'affiche devrait ressembler à la figure 1.

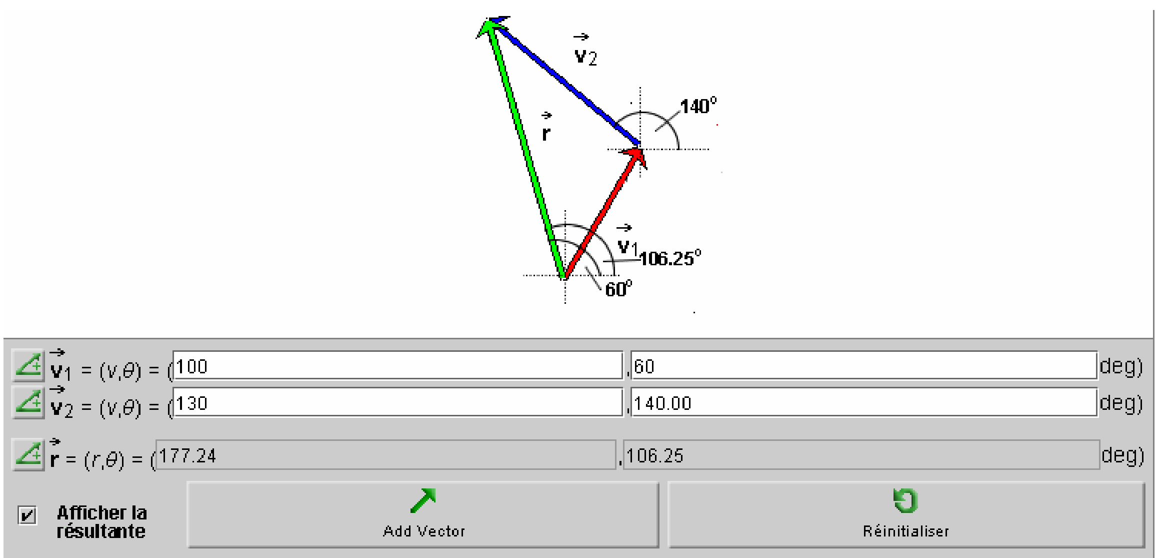


Figure 1

Exercice 1 Dans la figure 1, la construction graphique de la résultante est faite par la méthode ______________.

La résultante peut être affichée en trois modes :

1. Grandeur et direction en coordonnées polaires positives (r, θ);
2. Grandeur et direction en coordonnées cardinales (r, θ);

3. Composantes cartésiennes (r_x, r_y).

Clique trois fois sur Mode pour la résultante $\vec{r}$ et active le mode Coordonnées cartésiennes ( ). Dans ce mode, les composantes *x* et *y* de la résultante (r_x, r_y) sont affichées comme l'illustre la figure 2.

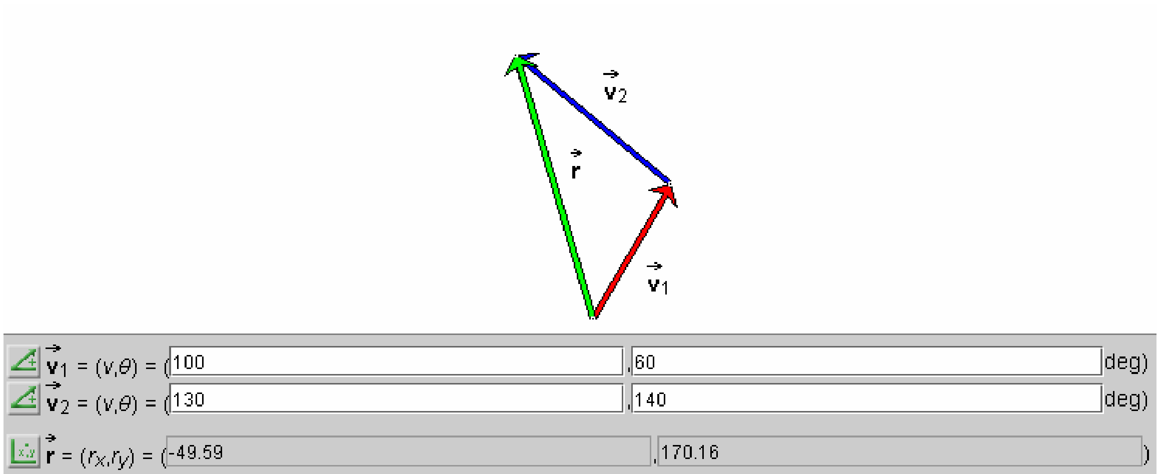


Figure 2

Exercice 2 Utilise le bouton de bascule Mode pour déterminer ce qui suit :

a) La grandeur et la direction de la résultante en coordonnées polaires (positives) ($\vec{r}$) sont (_____, _____).
b) La grandeur et la direction de la résultante en coordonnées cardinales ($\vec{r}$) sont (_____, _____ E du N).
c) Les composantes cartésiennes de la résultante ($\vec{r}$) sont (_____, _____).

Comment calcule-t-on la résultante? On peut la trouver par deux méthodes différentes.

- La méthode 1 s'appuie sur la loi des cosinus pour trouver la grandeur résultante et sur la loi des sinus pour trouver la direction résultante.
- La méthode 2 s'appuie sur les composantes vectorielles pour calculer la grandeur ainsi que la direction résultante. Chaque méthode est présentée ci-après.

Méthode 1 – Calcul de la résultante en utilisant la loi des cosinus et celle des sinus

Pour calculer la grandeur et la direction de la résultante, telles qu'affichées à la figure 1, nous avons besoin d'un diagramme montrant toutes les quantités pertinentes, comme à la figure 3 ci-après.

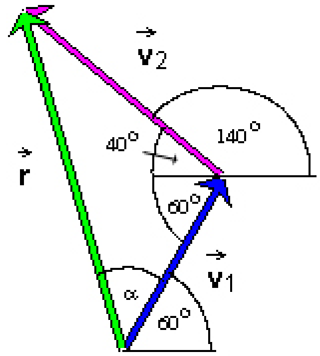


Figure 3

Nous voulons calculer la grandeur *r* de la résultante $\vec{r}$ et de l'angle α. L'angle de direction θ de la résultante en coordonnées polaires (positives) est alors θ = α + 60º.

Nous utilisons la loi des cosinus pour calculer la grandeur *r* et la loi des sinus pour calculer l'angle α. Pour une description de ces lois, consulte l'annexe.

D'après la figure 3, on peut utiliser la loi des cosinus pour calculer la grandeur *r* du vecteur résultant.

$$r^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\theta$$
$$r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\theta}$$
$$r = \sqrt{100^2 + 130^2 - ((2)(100)(130)(\cos 100^\circ))}$$
$$r = 177.24$$

(Note : L'angle opposé au vecteur $\vec{r}$ est égal à 60 + 40 = 100º.)

Pour appliquer la loi des sinus afin de calculer α, apparie l'angle α au côté opposé de grandeur v_2 et l'angle de 100º au côté opposé de grandeur *r*.

$$\frac{(\sin\alpha)}{v_2} = \frac{(\sin 100^o)}{r}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{(v_2)(\sin 100^o)}{r}\right)$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{(130)(\sin 100^o)}{177.24}\right)$$

$$\alpha = 46.25^o$$

$$\theta = 46.25^o + 60^o = 106.25^o$$

Par conséquent, le vecteur résultant est 177,24 à 106,25º dans la direction polaire (positive). Vérifie cette réponse au moyen de l'applet.

Exercice 3 En te servant de la loi des cosinus et de celle des sinus, calcule la résultante (somme) des deux vecteurs qui suivent. Montre tous les calculs et les diagrammes dont tu as besoin. Indique la direction en utilisant les coordonnées polaires (positives) et vérifie ta réponse au moyen de l'applet.

$\vec{v}_1$ = 150, 50º polaire (positive)
$\vec{v}_2$ = 200, 150º polaire (positive)

Diagramme vectoriel :	Calcul de la grandeur *r* d'après la loi des cosinus :	Calcul de la direction θ d'apr la loi des sinus (coordonnée polaires [positives]) :

Exercice 4 En te servant de la loi des cosinus et de celle des sinus, calcule la résultante (somme) des deux vecteurs qui suivent. Montre tous les calculs et les diagrammes dont tu as besoin. Indique la direction en coordonnées polaires (positives) et vérifie ta réponse au moyen de l'applet.

$\vec{v}_1$ = 100, 150º polaire (positive)
$\vec{v}_2$ = 75, 250º polaire (positive)

Diagramme vectoriel :	Calcul de la grandeur *r* d'après la loi des cosinus :	Calcul de la direction θ d'apr la loi des sinus (coordonnée polaires [positives]) :

Méthode 2 – Calcul de la résultante en utilisant les composantes vectorielles

Pour les calculs qui suivent, il faut que tu connaisses les composantes (scalaires) d'un vecteur. Pour une description des composantes vectorielles, consulte l'annexe.

Nous allons maintenant calculer la somme des deux mêmes vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ qu'à la section précédente, mais cette fois-ci en utilisant les composantes.

Il est particulièrement facile de le faire si les vecteurs sont déjà spécifiés en fonction de leur composante (x, y), $(v_x, v_y)_1$ et $(v_x, v_y)_2$. Cependant, nous supposerons que les vecteurs sont spécifiés en fonction de leur grandeur et de leur direction [(v_1, θ_1) et (v_2, θ_2)]. Les angles sont mesurés en coordonnées polaires (positives) (ou cardinales N de E). Voir la figure 4 qui suit.

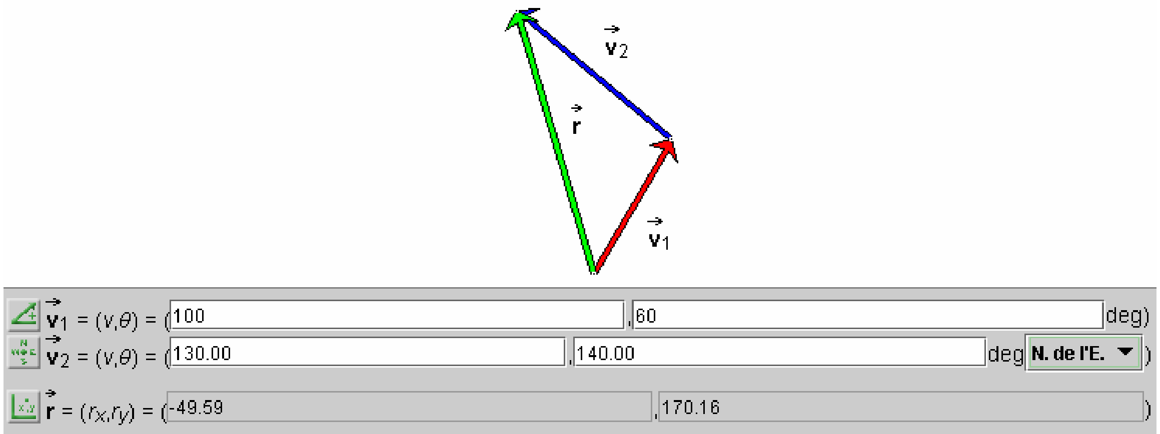


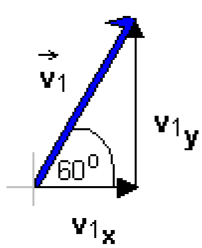
Figure 4

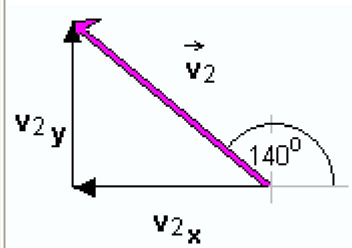
La grandeur et la direction de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont :

$v_1 = 100, \quad \theta_1 = 60^o$

$v_2 = 130, \quad \theta_2 = 140^o$

Leurs composantes sont calculées au moyen des fonctions trigonométriques appropriées :

Diagramme vecteur	Composant *x*	Composant *y*
	$\cos\theta = \frac{adj}{hyp}$ $\cos 60^o = \frac{v_{1x}}{\vec{v}_1}$ $v_{1x} = \cos 60^o (\vec{v}_1)$ $v_{1x} = \cos 60^o (100)$ $v_{1x} = +50.00$	$\sin\theta = \frac{opp}{hyp}$ $\sin 60^o = \frac{v_{1y}}{\vec{v}_1}$ $v_{1y} = \sin 60^o (\vec{v}_1)$ $v_{1y} = \sin 60^o (100)$ $v_{1y} = +86.60$



$$\cos\theta = \frac{adj}{hyp}$$

$$\cos 140^0 = \frac{v_{2x}}{\vec{v}_2}$$

$$v_{2x} = \cos 140^0 (\vec{v}_2)$$

$$v_{2x} = \cos 140^0 (130)$$

$$v_{2x} = -99.59$$

$$\sin\theta = \frac{opp}{hyp}$$

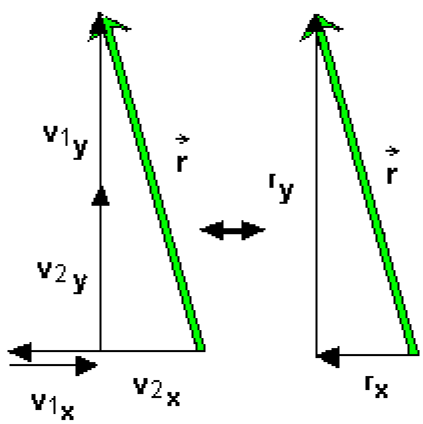
$$\sin 140^0 = \frac{v_{2y}}{\vec{v}_2}$$

$$v_{2y} = \sin 140^0 (\vec{v}_2)$$

$$v_{2y} = \sin 140^0 (130)$$

$$v_{2y} = +83.56$$

Additionner les deux vecteurs équivaut à additionner les composantes respectives. Si les composantes de la résultante $\vec{r}$ sont dénotées (r_x, r_y), nous obtenons :



$r_x = v_{x,1} + v_{x,2}$ = (+50,00) + (-99,59) = -49,59

$r_y = v_{y,1} + v_{y,2}$ = (+86,60) + (+83,56) = +170,16

Vérifie qu'il s'agit des valeurs affichées dans la figure 4.

Il est parfaitement correct de spécifier la résultante en fonction des composantes et d'arrêter le calcul à ce stade. Cependant, s'il faut obtenir la grandeur et l'angle de direction de la résultante, on peut les calculer d'après les composantes.

De nouveau, il est très utile de faire un diagramme pour illustrer les angles et les autres quantités pertinentes. Voir la figure 5 ci-après.

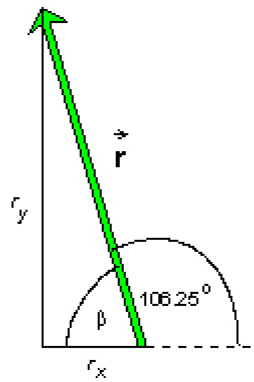


Figure 5

Le triangle formé par le vecteur $\vec{r}$ et les deux composantes est un triangle rectangle dont l'hypoténuse coïncide avec le vecteur. Par conséquent, on peut utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la grandeur résultante.

$$r^2 = r_x^{\ 2} + r_y^{\ 2}$$
$$r = \sqrt{r_x^{\ 2} + r_y^{\ 2}}$$
$$r = \sqrt{49.59^2 + 170.16^2}$$
$$r = 177.24$$

Vérifie cette valeur au moyen de l'applet.

L'examen de la figure 5 montre que l'on peut calculer la direction en utilisant la loi des tangentes.

$$\tan\beta = \frac{|r_y|}{|r_x|}$$
$$\beta = \tan^{-1}\frac{|r_y|}{|r_x|}$$
$$\beta = \tan^{-1}\frac{|170.16|}{|49.59|}$$
$$\beta = 73.75^{\circ}$$

Cela implique que la valeur de l'angle de direction de $\vec{r}$ est :

180 - 73,75 = 106,24º

Par conséquent, le vecteur résultant est 177,24 à 106,25º dans la direction polaire (positive). Vérifie cette réponse au moyen de l’applet.

Brièvement, si deux vecteurs, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, sont définis en fonction de leur grandeur et de leur direction, tu peux calculer la résultante de la façon suivante :

- Utilise un diagramme vectoriel et des fonctions trigonométriques pour convertir les vecteurs en leurs composantes.
- Ajoute les composantes ($x_{totale} = x_1 + x_2$) et ($y_{totale} = y_1 + y_2$). (Souviens-toi d’inclure les directions positives ou négatives.)
- Construis un diagramme vectoriel ayant la forme d’un triangle rectangle en ajoutant la composante x_{totale} à la composante y_{totale} par la méthode de la mise bout à bout. (Souviens-toi d’inclure les directions positives ou négatives.)
- Calcule la grandeur résultante en appliquant le théorème de Pythagore.
- Calcule l’angle de direction en utilisant la fonction trigonométrique appropriée (loi des tangentes).

Cela pourrait te demander un peu plus de travail que le calcul de la résultante en utilisant la loi des cosinus et celle des sinus comme nous l’avons fait à la section précédente. Cependant, si les deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont déjà définis en fonction de leurs composantes et si l’on veut que la résultante soit également définie en fonction de ses composantes, comme c’est souvent le cas, le calcul est plus simple.

Exercice 5 En te servant de la méthode des composantes, calcule la résultante (somme) des deux vecteurs qui suivent. Montre tous les calculs et les diagrammes dont tu as besoin. Indique la direction en coordonnées polaires (positives) et vérifie ta réponse au moyen de l’applet.

$\vec{v}_1$ = 175 , 70º polaire (positive)
$\vec{v}_2$ = 200, 200º polaire (positive)

a) Diagramme vectoriel et calcul des composantes pour $\vec{r}_1$:	b) Diagramme vectoriel et calcul des composantes pour $\vec{r}_2$:

c) Addition des composantes et du diagramme vectoriel résultant :

d) Calcul de la grandeur résultante à l’aide du théorème de Pythagore :

e) Calcul de la direction résultante en utilisant la loi des tangentes :
(Exprime la direction en coordonnées polaires [positives].)

Exercice 6 En te servant de la méthode des composantes, calcule la résultante (somme) des deux vecteurs qui suivent. Montre tous les calculs et les diagrammes dont tu as besoin. Indique la direction en coordonnées polaires (positives) et vérifie ta réponse au moyen de l’applet.

$\vec{v}_1$ = 185, 45º polaire (positive)
$\vec{v}_2$ = 95, 320º polaire (positive)

a) Diagramme vectoriel et calcul des composantes pour $\vec{r}_1$:	b) Diagramme vectoriel et calcul des composantes pour $\vec{r}_2$:

c) Addition des composantes et diagramme vectoriel résultant :

d) Calcul de la grandeur résultante à l'aide du théorème de Pythagore :

e) Calcul de la direction résultante en utilisant la loi des tangentes :
(Exprime la direction en coordonnées polaires [positives].)

Exercice 7 En te servant de la méthode des composantes, calcule la résultante (somme) des deux vecteurs qui suivent. Montre tous les calculs et les diagrammes dont tu as besoin. Indique la direction en coordonnées polaires (positives) et vérifie ta réponse au moyen de l'applet.

$\vec{v}_1$ = (+135, -120) - composantes
$\vec{r}_2$ = (-200, -45) - composantes

a) Addition des composantes et diagramme le vectoriel résultant :

b) Calcul de la grandeur résultante à l'aide du théorème de Pythagore :

c) Calcul de la direction résultante en utilisant la loi des tangentes :
(Exprime la direction en coordonnées polaires [positives].)

>>>>> Annexe <<<<<

Loi des cosinus

La loi des cosinus est une équation générale reliant les trois côtés et un angle d'un triangle. Aucune contrainte n'est appliquée en ce qui concerne la forme du triangle. Trois éléments déterminent un triangle. Si trois des quatre éléments de l'équation de la loi des cosinus sont donnés, l'équation permet de calculer le quatrième.

La figure 6 illustre un triangle général. Les trois côtés sont annotés *a*, *b*, *c* et les trois angles sont annotés α, β, γ.

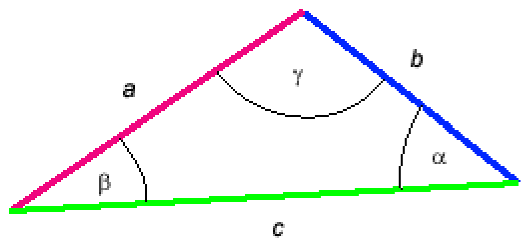


Figure 6

Il existe trois équations de la loi des cosinus, selon l'angle qui est inclus :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \qquad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \qquad (2)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \qquad (3)$$

Note que le théorème de Pythagore est un cas spécial de ces équations, où l'un des angles est égal à 90º. Par exemple, si $\gamma = 90º$, alors $\cos \gamma = 0$ et l'équation (1) se réduit au théorème de Pythagore :

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (4)$$

Remarque aussi le signe moins devant le terme du cosinus dans ces équations. Ce signe moins a l'effet suivant. Considérons l'équation (1). Si $\gamma < 90º$, étant donné le signe moins devant le terme du cosinus, l'équation (1) donne une valeur de c qui est inférieure à la valeur donnée par le théorème de Pythagore (4). Si $\gamma > 90º$, le cosinus est négatif. La combinaison de ce cosinus négatif au signe moins qui le précède rend le terme positif dans le deuxième membre de l'équation (1), ce qui donne une valeur plus grande que celle donnée par le théorème de Pythagore.

Loi des sinus

La loi des sinus est un ensemble d'équations qui sont vérifiées pour tout triangle, c'est-à-dire que le rapport « du sinus d'un angle à la longueur du côté opposé » est le même pour toute paire d'angle et de côté opposé.

La figure 7 illustre un triangle général. Les trois côtés sont annotés *a*, *b*, *c* et les trois angles sont annotés α, β, γ.

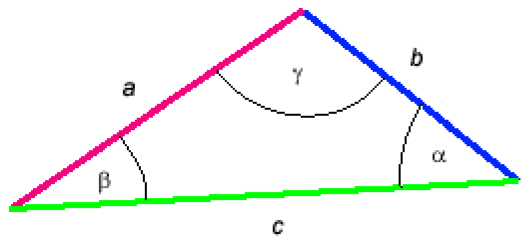


Figure 7

Les équations de la loi de sinus sont :

$$\frac{(\sin\alpha)}{a} = \frac{(\sin\beta)}{b} = \frac{(\sin\gamma)}{c} \quad (5)$$

Un triangle est déterminé par trois de ses éléments. Étant donné qu'il y a deux côtés et un angle opposé à l'un des côtés, la loi des sinus te permet de déterminer l'angle opposé à l'autre côté.

Composantes

Les vecteurs peuvent être décrits en fonction de leurs composantes scalaires. Dans un espace à deux dimensions, un vecteur possède deux composantes scalaires, l'une le long de l'axe des abscisses (*x*) et l'autre le long de l'axe des ordonnées (*y*). Pour un vecteur $\vec{\mathbf{a}}$, ces composantes sont désignées a_x et a_y, respectivement. La figure 8 illustre les composantes d'un vecteur $\vec{\mathbf{a}}$ qui est situé dans le premier cadran.

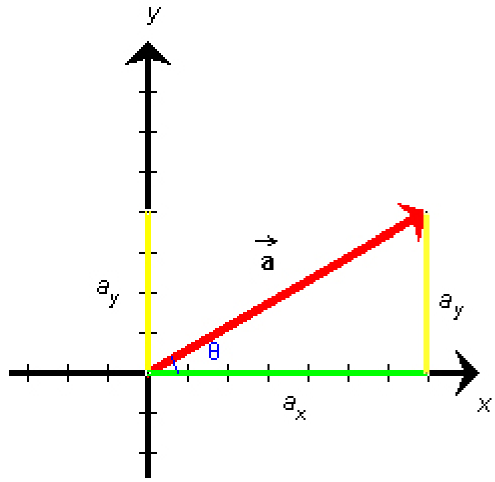


Figure 8

Les *composantes scalaires* d'un vecteur sont les projections du vecteur sur l'axe des abscisses (x) et sur l'axe des ordonnées (y). À la figure 8, elles sont représentées en vert et en jaune, respectivement. Elles sont appelées composantes scalaires, parce qu'il s'agit de nombres. Les composantes scalaires sont égales aux coordonnées x et y de l'extrémité du vecteur si l'origine de celui-ci coïncide avec l'origine du système de coordonnées, comme cela est le cas ici.

À la figure 8, le vecteur a une grandeur de 8 et un angle θ par rapport à l'axe des x positif égal à 30º. Ses composantes scalaires ont les valeurs :

$$a_x = 6{,}93, \qquad a_y = 4{,}00 \qquad (6)$$

Pour les vecteurs situés dans le premier cadran, les deux composantes sont positives, mais pour ceux situés dans l'un des trois autres cadrans, l'une des composantes est négative. Par exemple, pour un vecteur dans le deuxième cadran, la composante x est négative, tandis que la composante y est aussi positive.

La définition du sinus et du cosinus implique que :

$$a_x = a \cos \theta, \qquad a_y = a \sin \theta \qquad (7)$$

En introduisant les valeurs $a = 8{,}00$ et $\theta = 30{,}0º$ dans ces équations, on obtient les valeurs données par les équations (6) et illustrées à la figure 8.

Remarque que les équations (7) sont correctes même si le vecteur $\vec{\mathbf{a}}$ est dans le deuxième, le troisième ou le quatrième cadran. Aucun signe ne doit être changé. Tout changement de signe est automatiquement pris en compte par les signes des fonctions cosinus et sinus pour les valeurs de θ dans n'importe lequel de ces trois cadrans.